Komplexe Gleichungen

Wolfgang Kippels

22. Mai 2024

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

Diese und ähnliche Anleitungen zu erstellen erfordert sehr viel Zeit und Mühe. Trotzdem stelle ich alles kostenfrei der Allgemeinheit zur Verfügung. Wenn Sie diese Datei hilfreich finden, dann bitte ich Sie um Erfüllung des nachfolgend beschriebenen „Generationenvertrages“:

> *Wenn Sie später einmal Ihre Ausbildungsphase beendet haben und im Beruf stehen (oder auch noch danach), geben Sie bitte Ihr Wissen in geeigneter Form an die nachfolgende Generation weiter.*

Wenn Sie mir eine Freude machen wollen, dann schreiben Sie mir bitte eine kleine Email an die folgende Adresse: mail@dk4ek.de

Vielen Dank!

2 Was sind komplexe Zahlen?

Sehen wir uns einmal das Beispiel einer Quadratische Gleichung an.

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

Diese Gleichung kann man lösen, beispielsweise mit der p-q-Formel:[1]

$$\begin{aligned}
x^2 - 4x + 3 &= 0 \\
x_{1/2} &= -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - 3} \\
x_{1/2} &= 2 \pm \sqrt{4-3} \\
x_{1/2} &= 2 \pm \sqrt{1} \\
x_1 = 2+1 = 3 & \qquad x_2 = 2-1 = 1
\end{aligned}$$

Wie man leicht sieht, gibt es 2 Lösungen. So weit, so gut. Problematisch wird es aber bei dieser Gleichung:

$$x^2 - 6x + 10 = 0$$

Das Problem tritt erst im Zuge des Lösungsversuches auf. Das sieht dann so aus:

$$\begin{aligned}
x^2 - 6x + 10 &= 0 \\
x_{1/2} &= -\frac{-6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-6}{2}\right)^2 - 10} \\
x_{1/2} &= 3 \pm \sqrt{9-10} \\
x_{1/2} &= 3 \pm \sqrt{-1}
\end{aligned}$$

Aus einer **negativen** Zahl (hier: -1) kann man keine Wurzel ziehen! Jedenfalls nicht im Bereich der Reellen Zahlen.[2]

Erinnern wir uns an die Grundschule. Da haben wir **natürliche Zahlen** addiert und subtrahiert. Irgendwann lief uns dann einmal eine Rechnung wie $3-4$ über den Weg. Mit den Holzklötzchen[3], mit deren Hilfe wir Rechenaufgaben gelöst haben, ließ sich diese Aufgabe nicht mehr lösen. Ich habe 3 Klötzchen und soll 4 davon wegnehmen. Das war schlichtweg nicht möglich. Deswegen haben wir damals zusätzlich zu den **natürlichen Zahlen** neue Zahlen „erfunden“, nämlich die **Negativen Zahlen**. Die wurden dann mit den bisher bekannten **Natürlichen Zahlen** zusammengefasst, und alle Zahlen zusammen bekamen den Namen **Ganze Zahlen** als Oberbegriff.

[1] Einzelheiten zur p-q-Formel siehe hier: https://dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/quad.pdf

[2] **Reelle Zahlen** sind alle Zahlen, die sich auf dem Zahlenstrahl darstellen lassen, also **Ganze Zahlen** wie 1, -3 oder 17, **Rationale Zahlen** wie $\frac{3}{4}$, $-\frac{22}{7}$ oder 3,1415927 sowie auch **Irrationale Zahlen** wie $\sqrt{2}$, π oder e.

[3] Ich bin nicht sicher, ob man heute noch in der Grundschule mit Klötzchen rechnet, aber etwas ähnliches wird es schon sein.

Genauso wie damals bei den **Ganzen Zahlen** macht man es hier nun auch. Wir haben hier eine Rechenoperation, die im Bereich der **Reellen Zahlen** keine Lösung hat, nämlich das Wurzelziehen aus negativen Zahlen. Wir müssen also wieder neue Zahlen „erfinden“. Das hat für uns bereits Johann Carl Friedrich Gauss[4] erledigt. Er hat eine **Imaginäre Einheit** $\boldsymbol{i}$ mit folgender Definition eingeführt:

$$\boxed{i^2 = -1}$$

In Worten ausgedrückt: $\boldsymbol{i}$ ist die Zahl, deren Quadrat -1 ergibt.

Hiermit gibt es nun **Imaginäre Zahlen**. Sie entstehen durch eine Multiplikation einer **Reellen Zahl** mit der **Imaginären Einheit**. Hier ein paar Beispiele für **Imaginäre Zahlen**: $2i,\ 5i,\ -9i,\ \frac{3}{4}i,\ \pi i, \ldots$

Spätestens jetzt stellt sich die ketzerische Frage: Was soll der Quatsch? Kann man damit etwas anfangen?

Darauf komme ich später. Zunächst möchte ich aber zeigen, dass man damit durchaus vernünftig im Rahmen der bekannten Regeln rechnen kann. Dazu greife ich das zweite Beispiel wieder auf, das uns in das Dilemma geführt hat.

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 10 &= 0 \\ x_{1/2} &= 3 \pm \sqrt{-1} \end{aligned}$$

In der Definition

$$i^2 = -1$$

kann ich auf beiden Seiten die Wurzel ziehen. Ich erhalte:

$$i = \sqrt{-1}$$

Damit geht die Lösung wie folgt weiter:

$$\begin{aligned} x_{1/2} &= 3 \pm \sqrt{-1} \\ x_{1/2} &= 3 \pm i \\ x_1 = 3 + i \qquad & \qquad x_2 = 3 - i \end{aligned}$$

Das sieht zugegebenermaßen immer noch sehr verwirrend und keinesfalls vernünftig aus. Aber machen wir doch einfach mal mit der Lösung $x_1 = 3 + i$ die Probe.

$$\begin{aligned} x_1^2 - 6x_1 + 10 &= 0 \\ (3+i)^2 - 6 \cdot (3+i) + 10 &= 0 \\ 9 + 6i + i^2 - 18 - 6i + 10 &= 0 \\ 1 + i^2 &= 0 \quad |i^2 = -1 \\ 1 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

[4] Johann Carl Friedrich Gauss: Deutscher Mathematiker, ∗3.4.1777, †23.2.1866.

Wie wir sehen, geht die Probe mit den ganz normalen Rechenmethoden auf. Man muss nur an der Stelle, wo i^2 auftaucht, dafür eine -1 einsetzen.

Auch mit $x_2 = 3 - i$ geht die Probe auf, wie ich hier zeigen möchte:

$$\begin{array}{rcll} x_2^2 - 6x_2 + 10 & = & 0 & \\ (3-i)^2 - 6 \cdot (3-i) + 10 & = & 0 & \\ 9 - 6i + i^2 - 18 + 6i + 10 & = & 0 & \\ 1 + i^2 & = & 0 & |i^2 = -1 \\ 1 - 1 & = & 0 & \end{array}$$

Kommen wir nun zu der Frage: Was macht man mit Komplexen Zahlen? Gibt es dafür sinnvolle Anwendungen?

Ja, die gibt es tatsächlich, beispielsweise in der Elektrotechnik im Bereich der Wechselstromtechnik.[5] Da diese Anwendung eine sehr wichtige ist und mir zudem aus persönlichen Gründen die Elektrotechnik besonders am Herzen liegt, möchte ich hier eine Anpassung der Bezeichnungsweise vornehmen.

In der Elektrotechnik gibt es eine sehr wichtige technische Größe, nämlich den elektrischen Strom, Formelzeichen I. Hat man es mit zeitabhängigen Strömen wie in der Wechselstromtechnik zu tun, dann verwendet man als Formelzeichen den Kleinbuchstaben i. Wenn dann nun auch das $\boldsymbol{i}$ für die **Imaginäre Einheit** hier auftritt, führt das zu Problemen. Daher haben sich die Elektrotechniker darauf geeinigt, einen anderen Buchstaben für die **Imginäre Einheit** zu verwenden, nämlich das $\boldsymbol{j}$. Um die Unterscheidung noch etwas weiter zu verbessern, stellt man das j jeweils **vor** die Zahl, also anders, als bei „normalen“ Einheiten, beispielsweise also nicht $3i$, sondern $j3$. Ein Blindwiderstand mit einer Größe von $100\,\Omega$ hat dann also nicht $100i\,\Omega$, sondern $j100\,\Omega$.

Dieses Skript möchte zwar die **mathematischen** Grundlagen der Komplexen Rechnung darstellen, im weiteren Verlauf möchte ich dabei aber Notation der Elektrotechnik verwenden.

[5] Details zur Wechselstromtechnik siehe hier:
https://dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/wechsels.pdf

3 Rechnen mit Komplexen Zahlen

Grundlage für die Komplexe Rechnung ist die Definition der **Imaginären Einheit**. In rein auf Mathematik bezogener Literatur wird dafür der Buchstabe $\boldsymbol{i}$ verwendet, wie bereits erwähnt. Steht die Elektrotechnik im Hintergrund, muss also gelegentlich i als Variablenname für Ströme verwendet werden, kann das zu Verwirrungen führen. Daher verwende ich – wie allgemein in der Elektrotechnik üblich – den Buchstaben $\boldsymbol{j}$ für die Imaginäre Einheit. Sie ist damit wie folgt definiert:

$$\text{Definition: } \boxed{j^2 = -1}$$

Die Menge der Imaginären Zahlen wird mit $\mathbb{I}$ bezeichnet. Sie werden dargestellt als Produkt aus der imaginären Einheit und einer Reellen Zahl, wobei es üblich ist, die Imaginäre Einheit voranzustellen. Beispiele:

$$j1 \qquad j2 \qquad j3 \qquad -j5 \qquad -j\frac{2}{3}$$

Mischt man Reelle Zahlen mit Imaginären Zahlen, so erhält man Komplexe Zahlen. Die Zahlenmenge der Komplexen Zahlen heißt $\mathbb{C}$.

Komplexe Variablen werden mit einem Unterstrich gekennzeichnet. Beispiel:

$$\underline{z} = a + jb$$

Im Beispiel ist $\underline{z}$ eine Komplexe Zahl, a und b sind Reelle Zahlen. Dabei heißt a Realteil von $\underline{z}$ und b Imaginärteil von $\underline{z}$. Man schreibt das auch so:

$$\begin{aligned} a &= \operatorname{Re} \underline{z} \\ b &= \operatorname{Im} \underline{z} \end{aligned}$$

Aufgepasst: $\boldsymbol{j}$ ist *nicht* Bestandteil des Imaginärteils! j steht *vor* dem Imaginärteil, kennzeichnet ihn also nur. Das wird sehr oft verwechselt.

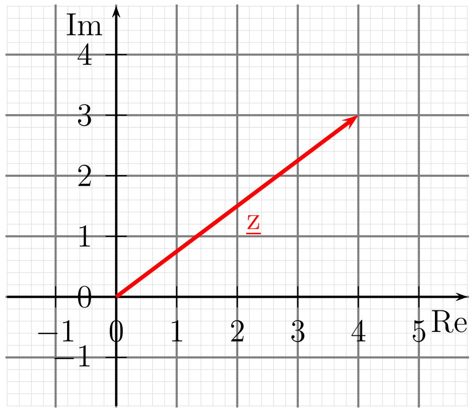
Zur **Veranschaulichung** Komplexer Zahlen wird die **Gaußsche Zahlenebene**[6] verwendt. Dazu wird der waagerecht verlaufende Zahlenstrahl mit den herkömmlichen Reellen Zahlen um einen senkrecht dazu verlaufenden Zahlenstrahl erweitert, an dem die Imaginären Zahlen eingetragen sind. Wir erhalten damit ein Koordinatensystem, bei dem die Achsen mit *Re* (Reelle Achse) und *Im* (Imaginäre Achse) bezeichnet sind. Die Komplexe Zahl wird dann als Pfeil dargestellt. Man nennt diesen Pfeil „**Zeiger**“. Aus diesem Grund werden Komplexe Zahlen auch als „Zeigergrößen“ bezeichnet. Der Zeiger beginnt am Koordinatenursprung und endet an dem Punkt, dessen Koordinaten dem Realteil und dem Imaginärteil von $\underline{z}$ entsprechen.

[6]Benannt nach ihrem Erfinder, dem bereits erwähnten Johann Carl Friedrich Gauss

Stellen wir das einmal an einem Beispiel dar. Nebenstehend ist die Gaußsche Zahlenebene dargestellt. Eingezeichnet ist die Komplexe Zahl:

$$\underline{z} = 4 + j3$$

Dazu wurden an der Reellen Achse 4 Einheiten und an der Imaginären Achse 3 Einheiten abgetragen.

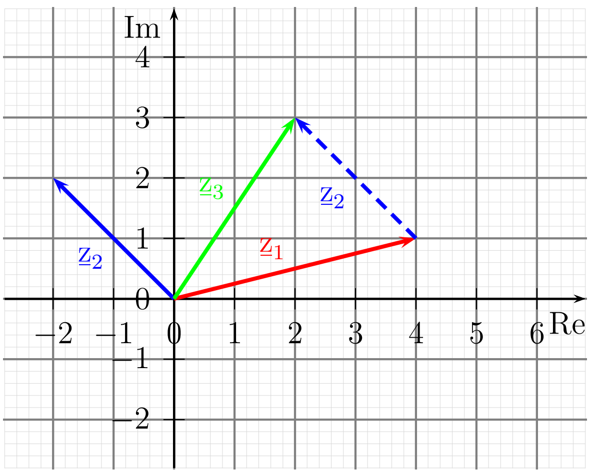


Als nächstes möchte ich die Addition zweier Zeiger in der Gaußschen Zahlenebene darstellen. Als Beispiel wähle ich:

$$\underline{z}_1 = 4 + j1 \qquad \underline{z}_2 = -2 + j2$$

Will (oder muss) man mit Komplexen Zahlen rechnen, dann kann man ganz normal die aus der Algebra bekannten Methoden und Formeln verwenden. Dabei behandelt man j im Prinzip wie einen Parameter oder eine Variable. Auf diese Weise wird jetzt die Summe aus $\underline{z}_1$ und $\underline{z}_2$ berechnet.

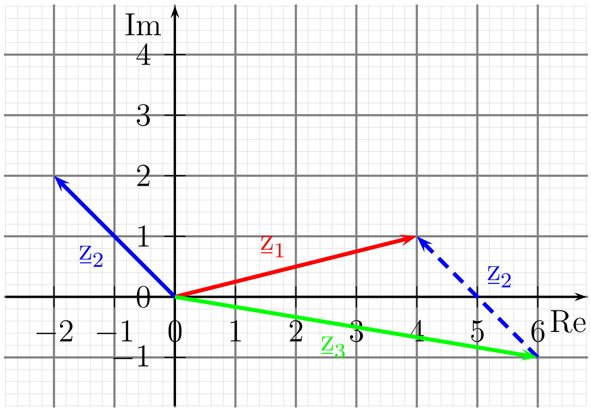
$$\underline{z}_3 = \underline{z}_1 + \underline{z}_2 = (4 + j1) + (-2 + j2) = 4 + j1 - 2 + j2 = 2 + j3$$



In nebenstehendem Bild sind die drei Zeiger $\underline{z}_1$, $\underline{z}_2$ und $\underline{z}_3$ eingezeichnet. Wie ist nun die Summe geometrisch zu deuten?

Schaut man sich die drei Zeiger genau an, dann kann man erkennen, dass der Zeiger $\underline{z}_2$ so parallelverschoben werden kann, dass sein Anfang auf dem Ende des Zeigers $\underline{z}_1$ zu liegen kommt. Dann verläuft der Summenzeiger $\underline{z}_3$ vom Anfang von $\underline{z}_1$ bis zum Ende des verschobenen Zeigers $\underline{z}_2$. Jede Summe kann auf diese Weise dargestellt werden. Dabei spielt es keine Rolle, in welcher Reihenfolge die Zeiger addiert werden. Man kann also auch $\underline{z}_1$ an die Zeigerspitze von $\underline{z}_2$ anlegen, die Spitze des Zeigers $\underline{z}_1$ läge wieder genau auf der Spitze des Summenzeigers $\underline{z}_3$, auch wenn dies hier nicht eingezeichnet ist.

Auch die Differenz zweier Zeiger ist auf ähnliche Art darstellbar. Man muss dann nur beachten, dass dabei der negativ zu verarbeitende Zeiger in **umgekehrter** Richtung durchlaufen wird. Bestimmen wir in unserem Zahlenbeispiel:



$$\underline{z}_3 = \underline{z}_1 - \underline{z}_2$$

Der Zeiger $\underline{z}_2$ ist negativ im Ergebnis enthalten; deshalb muss er so an $\underline{z}_1$ angelegt werden, dass er in umgekehrter Richtung durchlaufen wird. Das geschieht hier dadurch, dass seine Spitze an die Spitze von $\underline{z}_1$ angelegt wird. Sein Anfang liegt dann an der Spitze des Ergebniszeigers $\underline{z}_3$. Das Ergebnis prüfen wir nun durch eine Rechnung:

$$\underline{z}_3 = \underline{z}_1 - \underline{z}_2 = (4 + j1) - (-2 + j2) = 4 + j1 + 2 - j2 = 6 - j1$$

Das Ergebnis stimmt mit der graphisch ermittelten Lösung überein.

Das soll an Veranschaulichungen zunächst ausreichen. Das Rechnen mit Komplexen Zahlen erfolgt – wie schon erwähnt – mit den aus der Algebra bekannten Methoden und Formeln. Dabei wird j im Prinzip wie einen Parameter oder eine Variable behandelt. Nur dann, wenn einmal j^2 auftritt, ersetzt man das durch -1. Wir wollen das einmal an einer Komplexen Gleichung nachvollziehen.

Beispielaufgabe: Die Definitions- und Lösungsmenge der Komplexen Gleichung ist gesucht.

$$2\underline{x} - j1 = 18 - j3\underline{x}$$

Zunächst zur Definitionsmenge: Es gibt keinerlei Einschränkungen durch Brüche oder ähnliches, also gilt: $\boxed{D = \mathbb{C}}$

Um die Lösungsmenge zu bestimmen, gehen wir genau so vor, wie von Reellen Gleichungen gewohnt.

1. Alles mit $\underline{x}$ auf eine Seite bringen, alles ohne $\underline{x}$ auf die andere
2. $\underline{x}$ ausklammern
3. Durch den Klammerterm dividieren

Das sieht dann so aus:

$$\begin{aligned} 2\underline{x} - j1 &= 18 - j3\underline{x} && \mid + j1 + j3\underline{x} \\ 2\underline{x} + j3\underline{x} &= 18 + j1 && \mid \underline{x} \text{ ausklammern} \\ \underline{x} \cdot (2 + j3) &= 18 + j1 && \mid : (2 + j3) \\ \underline{x} &= \frac{18 + j1}{2 + j3} \end{aligned}$$

Im Prinzip wäre man damit fertig. Allerdings sollte der Bruch noch vereinfacht werden. Er soll in die Form $(a+jb)$ gebracht werden, damit man Realteil und Imaginärteil erkennen kann. Dazu ist es erforderlich, den Nenner des Bruches durch geschicktes Erweitern reell zu machen. Erweitert man mit dem **Konjugiert Komplexen Nenner** (das ist der Nenner mit umgekehrtem Vorzeichen vor dem Imaginärteil), dann sorgt die dritte Binomische Formel dafür, dass nur noch Quadratterme (und damit Reelle Terme) im neuen Nenner stehen. Das führen wir in unserem Beispiel einmal durch, damit das verständlich wird.

$$\begin{aligned}
\underline{x} &= \frac{18+j1}{2+j3} \quad &&|\text{ mit } (2-j3) \text{ erweitern}\\
\underline{x} &= \frac{(18+j1)\cdot(2-j3)}{(2+j3)\cdot(2-j3)} \quad &&|\text{ ausmultiplizieren}\\
\underline{x} &= \frac{36-j54+j2-j^2 3}{4-j^2 9} \quad &&|\text{ ausnutzen: } j^2=-1\\
\underline{x} &= \frac{36-j54+j2+3}{4+9} \quad &&|\text{ zusammenfassen}\\
\underline{x} &= \frac{39-j52}{13} \quad &&|\text{ mit Bruchrechenregel aufspalten}\\
\underline{x} &= \frac{39}{13}-j\frac{52}{13} \quad &&|\text{ Brüche ausrechnen}\\
\underline{x} &= 3-j4
\end{aligned}$$

$$\boxed{L=\{3-j4\}}$$

4 Übungsaufgaben

4.1 Lineare Gleichungen:

Bestimmen Sie die Lösungsmengen im Bereich der Komplexen Zahlen $\mathbb{C}$!

4.1.1 Aufgabe 1

$$2\underline{x} + j3\underline{x} = 19 - j4$$

4.1.2 Aufgabe 2

$$3\underline{x} - j5\underline{x} = -6 + j10$$

4.1.3 Aufgabe 3

$$2\underline{x} + j3\underline{x} = -13 + j13$$

4.1.4 Aufgabe 4

$$5\underline{x} - j2\underline{x} = -1 + j12$$

4.1.5 Aufgabe 5

$$5\underline{x} - j5\underline{x} = 50$$

4.1.6 Aufgabe 6

$$(5 - j4) \cdot (2\underline{x} + j2) = 52 + j24$$

4.1.7 Aufgabe 7

$$(2 - j3) \cdot (4\underline{x} - j3) = 15 + j6 + 2\underline{x}$$

4.1.8 Aufgabe 8

$$(3 - j2)(3\underline{x} + 5) = 12\underline{x} - j10$$

4.1.9 Aufgabe 9

$$(4 - j5)(5 - j2\underline{x}) = (3 + j2)\underline{x} + 4(9 - j2)$$

4.1.10 Aufgabe 10

$$(5 + j4)(2\underline{x} + j5) = 4\underline{x} - 20 + j25$$

4.1.11 Aufgabe 11

$$(3+j2)(2\underline{x}+j3\underline{x})-26=(4-j)(\underline{x}+2)+j42$$

4.1.12 Aufgabe 12

$$(2+j)(\underline{x}-j2\underline{x})+j6=(1+j2)(2\underline{x}-j\underline{x})-12$$

4.1.13 Aufgabe 13

$$(2-j4)(3\underline{x}+j2\underline{x})-6(4+j)=(3-j2)(\underline{x}+j4\underline{x})-j\underline{x}(10-j11)$$

4.1.14 Aufgabe 14

$$(1+j5)(2\underline{x}-j4\underline{x})+32+j4=(2+j5)(3\underline{x}-j\underline{x})+2\underline{x}$$

4.1.15 Aufgabe 15

$$\frac{60\underline{x}-j50}{3-j2}=15\underline{x}+25$$

4.1.16 Aufgabe 16

$$\frac{\underline{x}-3+j2}{\underline{x}+j1}=\frac{\underline{x}-2+j5}{\underline{x}+1+j2}$$

4.1.17 Aufgabe 17

$$\frac{2\underline{x}-j2}{2\underline{x}+j4}-\frac{\underline{x}+1-j}{3\underline{x}+j6}=\frac{\underline{x}+2-j}{4\underline{x}+j8}$$

4.1.18 Aufgabe 18

$$\frac{2\underline{x}+2+j4}{3\underline{x}-j3+6}-\frac{3\underline{x}-3+j}{4\underline{x}+8-j4}=2-j$$

4.2 Kompensationsaufgaben:

Bestimmen Sie die **reelle** Größe x so, dass der Imaginärteil des Terms $\underline{\mathrm{T}}$ Null wird und bestimmen Sie dann den Wert des Terms $\underline{\mathrm{T}}$!

4.2.1 Aufgabe 19

$$\underline{\mathrm{T}} = \frac{15 - j6}{2x + 20 - j4}$$

4.2.2 Aufgabe 20

$$\underline{\mathrm{T}} = \frac{5 + j(2x + 4)}{3 + j6}$$

4.2.3 Aufgabe 21

$$\underline{\mathrm{T}} = \frac{\left(\frac{-j8}{4-j2} + x\right) \cdot j8}{\frac{-j8}{4-j2} + x + j8}$$

4.2.4 Aufgabe 22

$$\underline{\mathrm{T}} = \frac{-j25x}{x - j25} + j20$$

4.3 Lineare Gleichungssysteme:

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmengen der Komplexen Lineargleichungssysteme!

4.3.1 Aufgabe 23

$$\begin{aligned}(-5+j3)\underline{x}+(2+j)\underline{y} &= -19-j12\\ (2-j)\underline{x}+(2+j4)\underline{y} &= -3-j\end{aligned}$$

4.3.2 Aufgabe 24

$$\begin{aligned}(3+j2)\underline{x}-(5+j2)\underline{y} &= -20+j17\\ (2-j3)\underline{x}+(1-j2)\underline{y} &= 2-j3\end{aligned}$$

4.3.3 Aufgabe 25

$$\begin{aligned}(3-j5)\underline{x}-(1-j3)\underline{y} &= 0\\ (6-j10)\underline{x}+(2+j5)\underline{y} &= 7-j23\end{aligned}$$

4.3.4 Aufgabe 26

$$\begin{aligned}(2-j2)\underline{x}+(3-j2)\underline{y} &= -5\\ (3-j2)\underline{x}+(2-j3)\underline{y} &= -2+j7\end{aligned}$$

4.3.5 Aufgabe 27

$$\begin{aligned}(1+j2)\underline{x}+(2-j2)\underline{y}-(1+j3)\underline{z} &= -10-j11\\ (1-j2)\underline{x}+(3-j3)\underline{y}+(1+j3)\underline{z} &= 9+j2\\ (2+j2)\underline{x}+(1+j2)\underline{y}+(2+j3)\underline{z} &= 11+j22\end{aligned}$$

4.3.6 Aufgabe 28

$$\begin{aligned}(2+j2)\underline{x}-(2+j3)\underline{y}+3\underline{z} &= 8+j\\(3-j2)\underline{x}+(4+j6)\underline{y}+(1+j2)\underline{z} &= -4+j9\\(3+j3)\underline{x}+(2-j3)\underline{y}+(2+j3)\underline{z} &= 7+j6\end{aligned}$$

4.3.7 Aufgabe 29

$$\begin{aligned}-3\underline{\mathrm{x}}-j2\underline{\mathrm{x}}+4\underline{\mathrm{y}}-j2\underline{\mathrm{y}} &= 3-j37\\\underline{\mathrm{x}}+j2\underline{\mathrm{x}}+6\underline{\mathrm{y}}-j3\underline{\mathrm{y}} &= -4-j13\end{aligned}$$

4.3.8 Aufgabe 30

$$\begin{aligned}3\underline{\mathrm{x}}-j2\underline{\mathrm{x}}+2\underline{\mathrm{y}}+j5\underline{\mathrm{y}} &= 23-j3\\3\underline{\mathrm{x}}-j\underline{\mathrm{x}}-2\underline{\mathrm{y}}-j\underline{\mathrm{y}} &= -2-j\end{aligned}$$

5 Lösungen der Übungsaufgaben

5.1 Lineare Gleichungen:

5.1.1 Aufgabe 1

$$D = \mathbb{C} \qquad L = \{2 - j5\}$$

5.1.2 Aufgabe 2

$$D = \mathbb{C} \qquad L = \{-2\}$$

5.1.3 Aufgabe 3

$$D = \mathbb{C} \qquad L = \{1 + j5\}$$

5.1.4 Aufgabe 4

$$D = \mathbb{C} \qquad L = \{-1 + j2\}$$

5.1.5 Aufgabe 5

$$D = \mathbb{C} \qquad L = \{5 + j5\}$$

5.1.6 Aufgabe 6

$$D = \mathbb{C} \qquad L = \{2 + j3\}$$

5.1.7 Aufgabe 7

$$D = \mathbb{C} \qquad L = \{j2\}$$

5.1.8 Aufgabe 8

$$D = \mathbb{C} \qquad L = \{1 - j2\}$$

5.1.9 Aufgabe 9

$$D = \mathbb{C} \qquad L = \left\{-\frac{378}{269} - j\frac{125}{269}\right\}$$

5.1.10 Aufgabe 10

$$D = \mathbb{C} \qquad L = \{0\}$$

5.1.11 Aufgabe 11

$$D = \mathbb{C} \qquad L = \{2 - j3\}$$

5.1.12 Aufgabe 12

$$D = \mathbb{C} \qquad L = \{1 - j2\}$$

5.1.13 Aufgabe 13

$$D = \mathbb{C} \qquad L = \left\{\frac{72}{65} - j\frac{69}{65}\right\}$$

5.1.14 Aufgabe 14

$$D = \mathbb{C} \qquad L = \{-2 - j2\}$$

5.1.15 Aufgabe 15

$$D = \mathbb{C} \qquad L = \{1 - j2\}$$

5.1.16 Aufgabe 16

$$D = \mathbb{C} \setminus \{-j; -1 - j2\} \qquad L = \{-1 + j\}$$

5.1.17 Aufgabe 17

$$D = \mathbb{C} \setminus \{-j2\} \qquad L = \{2 + j\}$$

5.1.18 Aufgabe 18

$$D = \mathbb{C} \setminus \{-2 + j\} \qquad L = \left\{-\frac{11}{87} - j\frac{158}{87}\right\}$$

5.2 Kompensationsaufgaben:

5.2.1 Aufgabe 19

$$x = -5 \qquad \underline{\mathrm{T}} = 1,5$$

5.2.2 Aufgabe 20

$$x = 3 \qquad \underline{\mathrm{T}} = \frac{5}{3}$$

5.2.3 Aufgabe 21

$$x_1 = 2,4 \quad \underline{\mathrm{T}}_1 = 4 \quad ; \quad x_2 = -4 \quad \underline{\mathrm{T}}_2 = -4$$

5.2.4 Aufgabe 22

$$x = \pm 50 \qquad \underline{\mathrm{T}} = \pm 10$$

5.3 Lineare Gleichungssysteme:

5.3.1 Aufgabe 23

$$D = \mathbb{C}^2 \qquad L = \{(1 + j3| - 2 + j)\}$$

5.3.2 Aufgabe 24

$$D = \mathbb{C}^2 \qquad L = \{(j2|2 - j3)\}$$

5.3.3 Aufgabe 25

$$D = \mathbb{C}^2 \qquad L = \{(1 - j3|3 - j5)\}$$

5.3.4 Aufgabe 26

$$D = \mathbb{C}^2 \qquad L = \{(2 + j2| - 3 - j2)\}$$

5.3.5 Aufgabe 27

$$D = \mathbb{C}^3 \qquad L = \{(2 + j3|1 - j2| - 4 + j14)\}$$

5.3.6 Aufgabe 28

$$D = \mathbb{C}^3 \qquad L = \{(1 - j|1 + j|1 + j2)\}$$

5.3.7 Aufgabe 29

$$D = \mathbb{C}^2 \qquad L = \{(3 + j5|2 - j3)\}$$

5.3.8 Aufgabe 30

$$D = \mathbb{C}^2 \qquad L = \{(2 - j|2 - j3)\}$$

6 Lösungswege der Übungsaufgaben

6.1 Lineare Gleichungen:

Bei Aufgabe 1 bis Aufgabe 14 gibt es keine Einschränkungen im Definitionsbereich. Daher gilt hier immer $D = \mathbb{C}$, ohne dass jedes Mal einzeln darauf hingewiesen wird. Bei Aufgabe 15 bis 18 ist eine explizite Berechnung erforderlich.

6.1.1 Aufgabe 1

$$
\begin{aligned}
2\underline{x} + j3\underline{x} &= 19 - j4 && |\ \underline{\mathrm{x}} \text{ ausklammern} \\
\underline{x} \cdot (2 + j3) &= 19 - j4 && |\ : (2 + j3) \\
\underline{x} &= \frac{19 - j4}{2 + j3} && |\ \text{Konjugiert komplex erweitern} \\
\underline{x} &= \frac{(19 - j4) \cdot (2 - j3)}{(2 + j3) \cdot (2 - j3)} \\
\underline{x} &= \frac{38 - j57 - j8 + j^2 12}{4 - j^2 9} \\
\underline{x} &= \frac{38 - j57 - j8 - 12}{4 + 9} \\
\underline{x} &= \frac{26 - j65}{13} \\
\underline{x} &= \frac{26}{13} - j\frac{65}{13} \\
\underline{x} &= 2 - j5 \\
L &= \{2 - j5\}
\end{aligned}
$$

6.1.2 Aufgabe 2

$$
\begin{aligned}
3\underline{x} - j5\underline{x} &= -6 + j10 \\
\underline{x} \cdot (3 - j5) &= -6 + j10 \quad | : (3 - j5) \\
\underline{x} &= \frac{-6 + j10}{3 - j5} \quad | \text{ Konjugiert komplex erweitern} \\
\underline{x} &= \frac{(-6 + j10) \cdot (3 + j5)}{(3 - j5) \cdot (3 + j5)} \\
\underline{x} &= \frac{-18 - j30 + j30 + j^2 50}{9 - j^2 25} \\
\underline{x} &= \frac{-18 - j30 + j30 - 50}{9 + 25} \\
\underline{x} &= \frac{-68}{34} \\
\underline{x} &= -2 \\
L &= \{-2\}
\end{aligned}
$$

Hier haben wir zufällig den Sonderfall, dass die Lösung eine Reelle Zahl ist.

6.1.3 Aufgabe 3

$$
\begin{aligned}
2\underline{x} + j3\underline{x} &= -13 + j13 \\
\underline{x} \cdot (2 + j3) &= -13 + j13 \quad | : (2 + j3) \\
\underline{x} &= \frac{-13 + j13}{2 + j3} \quad | \text{ Konjugiert komplex erweitern} \\
\underline{x} &= \frac{(-13 + j13) \cdot (2 - j3)}{(2 + j3) \cdot (2 - j3)} \\
\underline{x} &= \frac{-26 + j39 + j26 - j^2 39}{4 - j^2 9} \\
\underline{x} &= \frac{-26 + j39 + j26 + 39}{4 + 9} \\
\underline{x} &= \frac{13 + j65}{13} \\
\underline{x} &= \frac{13}{13} + j\frac{65}{13} \\
\underline{x} &= 1 + j5 \\
L &= \{1 + j5\}
\end{aligned}
$$

6.1.4 Aufgabe 4

$$\begin{aligned}
5\underline{x} - j2\underline{x} &= -1 + j12 \\
\underline{x} \cdot (5 - j2) &= -1 + j12 \quad | : (5 - j2) \\
\underline{x} &= \frac{-1 + j12}{5 - j2} \quad | \text{ Konjugiert komplex erweitern} \\
\underline{x} &= \frac{(-1 + j12) \cdot (5 + j2)}{(5 - j2) \cdot (5 + j2)} \\
\underline{x} &= \frac{-5 - j2 + j60 + j^2 24}{25 - j^2 4} \\
\underline{x} &= \frac{-5 - j2 + j60 - 24}{25 + 4} \\
\underline{x} &= \frac{-29 + j58}{29} \\
\underline{x} &= -\frac{29}{29} + j\frac{58}{29} \\
\underline{x} &= -1 + j2 \\
L &= \{-1 + j2\}
\end{aligned}$$

6.1.5 Aufgabe 5

$$\begin{aligned}
5\underline{x} - j5\underline{x} &= 50 \\
\underline{x} \cdot (5 - j5) &= 50 \quad | : (5 - j5) \\
\underline{x} &= \frac{50}{5 - j5} \quad | \text{ Konjugiert komplex erweitern} \\
\underline{x} &= \frac{50 \cdot (5 + j5)}{(5 - j5) \cdot (5 + j5)} \\
\underline{x} &= \frac{250 + j250}{25 - j^2 25} \\
\underline{x} &= \frac{250 + j250}{25 + 25} \\
\underline{x} &= \frac{250 + j250}{50} \\
\underline{x} &= \frac{250}{50} + j\frac{250}{50} \\
\underline{x} &= 5 + j5 \\
L &= \{5 + j5\}
\end{aligned}$$

6.1.6 Aufgabe 6

$$\begin{aligned}
(5-j4)\cdot(2\underline{x}+j2) &= 52+j24 \\
10\underline{x}+j10-j8\underline{x}-j^2 8 &= 52+j24 \quad |j^2=-1 \\
10\underline{x}+j10-j8\underline{x}+8 &= 52+j24 \quad |-8-j10 \\
10\underline{x}-j8\underline{x} &= 44+j14 \\
(10-j8)\underline{x} &= 44+j14 \quad |:(10-j8) \\
\underline{x} &= \frac{44+j14}{10-j8} \quad |\text{ Konjugiert komplex erweitern} \\
\underline{x} &= \frac{(44+j14)(10+j8)}{(10-j8)(10+j8)} \\
\underline{x} &= \frac{440+j352+j140+j^2 112}{100-j^2 64} \quad |j^2=-1 \\
\underline{x} &= \frac{440+j352+j140-112}{100+64} \\
\underline{x} &= \frac{328+j492}{164} \\
\underline{x} &= \frac{328}{164}+j\frac{492}{164} \\
\underline{x} &= 2+j3 \\
L &= \{2+j3\}
\end{aligned}$$

6.1.7 Aufgabe 7

$$\begin{aligned}
(2-j3)\cdot(4\underline{x}-j3) &= 15+j6+2\underline{x} \\
8\underline{x}-j6-j12\underline{x}-9 &= 15+j6+2\underline{x} \quad |+j6+9-2\underline{x} \\
6\underline{x}-j12\underline{x} &= 24+j12 \\
(6-j12)\underline{x} &= 24+j12 \quad |:(6-j12) \\
\underline{x} &= \frac{24+j12}{6-j12} \quad |\text{ Konjugiert komplex erweitern} \\
\underline{x} &= \frac{(24+j12)(6+j12)}{(6-j12)(6+j12)} \\
\underline{x} &= \frac{144+j288+j72-144}{36+144} \\
\underline{x} &= \frac{j360}{180} \\
\underline{x} &= j2 \\
L &= \{j2\}
\end{aligned}$$

6.1.8 Aufgabe 8

$$
\begin{aligned}
(3-j2)(3\underline{x}+5) &= 12\underline{x}-j10 \\
9\underline{x}+15-j6\underline{x}-j10 &= 12\underline{x}-j10 \quad |-15+j10-12\underline{x} \\
-3\underline{x}-j6\underline{x} &= -15 \\
(-3-j6)\underline{x} &= -15 \quad |:(-3-j6) \\
\underline{x} &= \frac{-15}{-3-j6} \quad | \text{ Konjugiert komplex erweitern} \\
\underline{x} &= \frac{(-15)(-3+j6)}{(-3-j6)(-3+j6)} \\
\underline{x} &= \frac{45-j90}{9+36} \\
\underline{x} &= \frac{45-j90}{45} \\
\underline{x} &= \frac{45}{45}-j\frac{90}{45} \\
\underline{x} &= 1-j2 \\
L &= \{1-j2\}
\end{aligned}
$$

6.1.9 Aufgabe 9

$$
\begin{aligned}
(4-j5)(5-j2\underline{x}) &= (3+j2)\underline{x}+4(9-j2) \\
20-j8\underline{x}-j25-10\underline{x} &= 3\underline{x}+j2\underline{x}+36-j8 \quad |-20+j25-3\underline{x}-j2\underline{x} \\
-13\underline{x}-j10\underline{x} &= 16+j17 \\
(-13-j10)\underline{x} &= 16+j17 \quad |:(-13-j10) \\
\underline{x} &= \frac{16+j17}{-13-j10} \quad | \text{ Konjugiert komplex erweitern} \\
\underline{x} &= \frac{(16+j17)(-13+j10)}{(-13-j10)(-13+j10)} \\
\underline{x} &= \frac{-208+j160-j221-170}{169+100} \\
\underline{x} &= \frac{-378-j61}{269} \\
\underline{x} &= -\frac{378}{269}-j\frac{61}{269} \\
\underline{x} &\approx -1,405-j0,2268 \\
L &= \left\{-\frac{378}{269}-j\frac{61}{269}\right\}
\end{aligned}
$$

6.1.10 Aufgabe 10

$$
\begin{aligned}
(5+j4)(2\underline{x}+j5) &= 4\underline{x}-20+j25 \\
10\underline{x}+j25+j8\underline{x}-20 &= 4\underline{x}-20+j25 \quad |-j25+20-4\underline{x} \\
6\underline{x}+j8\underline{x} &= 0 \\
(6+j8)\underline{x} &= 0 \quad |:(6+j8) \\
\underline{x} &= \frac{0}{6+j8} \\
\underline{x} &= 0 \\
L &= \{0\}
\end{aligned}
$$

6.1.11 Aufgabe 11

$$
\begin{aligned}
(3+j2)(2\underline{x}+j3\underline{x})-26 &= (4-j)(\underline{x}+2)+j42 \\
6\underline{x}+j9\underline{x}+j4\underline{x}-6\underline{x}-26 &= 4\underline{x}+8-j\underline{x}-j2+j42 \quad |+26-4\underline{x}+j\underline{x} \\
-4\underline{x}+j14\underline{x} &= 34+j40 \\
(-4+j14)\underline{x} &= 34+j40 \quad |:(-4-j14) \\
\underline{x} &= \frac{34+j40}{-4+j14} \\
\underline{x} &= \frac{(34+j40)(-4-j14)}{(-4+j14)(-4-j14)} \\
\underline{x} &= \frac{-136-j476-j160+560}{16+196} \\
\underline{x} &= \frac{424-j636}{212} \\
\underline{x} &= \frac{424}{212}-j\frac{636}{212} \\
\underline{x} &= 2-j3 \\
L &= \{2-j3\}
\end{aligned}
$$

6.1.12 Aufgabe 12

$$\begin{aligned}
(2+j)(\underline{x}-j2\underline{x})+j6 &= (1+j2)(2\underline{x}-j\underline{x})-12 \\
2\underline{x}-j4\underline{x}+j\underline{x}+2\underline{x}+j6 &= 2\underline{x}-j\underline{x}+j4\underline{x}+2\underline{x}-12 \\
4\underline{x}-j3\underline{x}+j6 &= 4\underline{x}+j3\underline{x}-12 \quad |-j6-4\underline{x}-j3\underline{x} \\
-j6\underline{x} &= -j6-12 \quad |:(-j6) \\
\underline{x} &= \frac{-j6-12}{-j6} \\
\underline{x} &= \frac{(-j6-12)\cdot j}{-j6\cdot j} \\
\underline{x} &= \frac{6-j12}{6} \\
\underline{x} &= 1-j2 \\
L &= \{1-j2\}
\end{aligned}$$

6.1.13 Aufgabe 13

$$\begin{aligned}
(2-j4)(3\underline{x}+j2\underline{x})-6(4+j) &= (3-j2)(\underline{x}+j4\underline{x})-j\underline{x}(10-j11) \\
6\underline{x}+j4\underline{x}-j12\underline{x}+8\underline{x}-24-j6 &= 3\underline{x}+j12\underline{x}-j2\underline{x}+8\underline{x}-j10\underline{x}-11\underline{x} \\
14\underline{x}-j8\underline{x}-24-j6 &= 0 \\
14\underline{x}-j8\underline{x} &= 24+j6 \\
(14-j8)\underline{x} &= 24+j6 \\
\underline{x} &= \frac{24+j6}{14-j8} \\
\underline{x} &= \frac{(24+j6)(14+j8)}{(14-j8)(14+j8)} \\
\underline{x} &= \frac{336+j192+j84-48}{196+64} \\
\underline{x} &= \frac{288+j276}{260} \\
\underline{x} &= \frac{288}{260}-j\frac{276}{260} \\
\underline{x} &= \frac{72}{65}-j\frac{69}{65} \\
L &= \left\{\frac{72}{65}-j\frac{69}{65}\right\}
\end{aligned}$$

6.1.14 Aufgabe 14

$$
\begin{aligned}
(1+j5)(2\underline{x}-j4\underline{x})+32+j4 &= (2+j5)(3\underline{x}-j\underline{x})+2\underline{x} \\
2\underline{x}-j4\underline{x}+j10\underline{x}+20\underline{x}+32+j4 &= 6\underline{x}-j2\underline{x}+j15\underline{x}+5\underline{x}+2\underline{x} \\
22\underline{x}+j6\underline{x}+32+j4 &= 13\underline{x}+j13\underline{x} \\
9\underline{x}-j7\underline{x} &= -32-j4 \\
(9-j7)\underline{x} &= -32-j4 \\
\underline{x} &= \frac{-32-j4}{9-j7} \\
\underline{x} &= \frac{(-32-j4)(9+j7)}{(9-j7)(9+j7)} \\
\underline{x} &= \frac{-288-j224-j36+28}{81+49} \\
\underline{x} &= \frac{-260-j260}{130} \\
\underline{x} &= -\frac{260}{130}-j\frac{260}{130} \\
\underline{x} &= -2-j2 \\
L &= \{-2-j2\}
\end{aligned}
$$

6.1.15 Aufgabe 15

$$\frac{60\underline{x} - j50}{3 - j2} = 15\underline{x} + 25$$

Da im Nenner kein Term mit $\underline{x}$ vorkommt, gibt es für den Definitionsbereich keine Einschränkungen.

$$D = \mathbb{C}$$

Bestimmen wir nun die Lösungsmenge.

$$\begin{aligned}
\frac{60\underline{x} - j50}{3 - j2} &= 15\underline{x} + 25 \quad | \cdot (3 - j2) \\
60\underline{x} - j50 &= (15\underline{x} + 25)(3 - j2) \\
60\underline{x} - j50 &= 45\underline{x} - j30\underline{x} + 75 - j50 \quad | + j50 - 45\underline{x} + j30\underline{x} \\
15\underline{x} + j30\underline{x} &= 75 \\
(15 + j30)\underline{x} &= 75 \quad | : (15 + j30) \\
\underline{x} &= \frac{75}{15 + j30} \\
\underline{x} &= \frac{75 \cdot (15 - j30)}{(15 + j30) \cdot (15 - j30)} \\
\underline{x} &= \frac{1125 - j2250}{225 + 900} \\
\underline{x} &= \frac{1125 - j2250}{1125} \\
\underline{x} &= \frac{1125}{1125} - j\frac{2250}{1125} \\
\underline{x} &= 1 - j2 \\
L &= \{1 - j2\}
\end{aligned}$$

6.1.16 Aufgabe 16

$$\frac{\underline{x}-3+j2}{\underline{x}+j1}=\frac{\underline{x}-2+j5}{\underline{x}+1+j2}$$

In beiden Nennern tauchen Terme mit $\underline{x}$ auf. Somit müssen die $\underline{x}$-Werte aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen werden, für die der eine oder der andere Nenner Null wird. Für den ersten Nenner ist das der Fall für $\underline{x}=-j$ und für den zweiten Nenner für $\underline{x}=-1-j2$. Also sieht der Definitionsbereich so aus:

$$D=\mathbb{C}\setminus\{-j;-1-j2\}$$

Bestimmen wir nun die Lösungsmenge.
Gleichungen mit Brüchen bekommt man bekanntlich am besten in den Griff, indem man die Gleichung mit dem Hauptnenner multipliziert. Da die beiden Nenner teilerfremd sind, ist der Hauptnenner das Produkt der Nenner.

$$\begin{aligned}
\frac{\underline{x}-3+j2}{\underline{x}+j1} &= \frac{\underline{x}-2+j5}{\underline{x}+1+j2} \quad |\cdot(\underline{x}+j1)\cdot(\underline{x}+1+j2)\\
(\underline{x}-3+j2)(\underline{x}+1+j2) &= (\underline{x}-2+j5)(\underline{x}+j1)\\
\underline{x}^2+\underline{x}+j2\underline{x}-3\underline{x}-3-j6+j2\underline{x}+j2-4 &= \underline{x}^2+j\underline{x}-2\underline{x}-j2+j5\underline{x}-5\\
\underline{x}^2-2\underline{x}+j4\underline{x}-7-j4 &= \underline{x}^2-2\underline{x}+j6\underline{x}-5-j2\\
j4\underline{x}-7-j4 &= j6\underline{x}-5-j2 \quad |-j6\underline{x}+7+j4\\
-j2\underline{x} &= 2+j2 \quad |:(-j2)\\
\underline{x} &= \frac{2+j2}{-j2}\\
\underline{x} &= \frac{(2+j2)\cdot j}{(-j2)\cdot j}\\
\underline{x} &= \frac{j2-2}{2}\\
\underline{x} &= j\frac{2}{2}-\frac{2}{2}\\
\underline{x} &= j-1\\
L &= \{-1+j\}
\end{aligned}$$

6.1.17 Aufgabe 17

$$\frac{2\underline{x}-j2}{2\underline{x}+j4}-\frac{\underline{x}+1-j}{3\underline{x}+j6}=\frac{\underline{x}+2-j}{4\underline{x}+j8}$$

Gleichungen mit Brüchen bekommt man bekanntlich am besten in den Griff, indem man die Gleichung mit dem Hauptnenner multipliziert. Führen wir also eine Nenneranalyse durch, wie von Reellen Bruchgleichungen gewohnt.

$$\begin{array}{rcllll}
2\underline{x}+j4 & = & 2 & & \cdot(\underline{x}+j2) & EF=2\cdot 3=6\\
3\underline{x}+j6 & = & & 3 & \cdot(\underline{x}+j2) & EF=2^2=4\\
4\underline{x}+j8 & = & 2^2 & & \cdot(\underline{x}+j2) & EF=3\\
\hline
HN & = & 2^2 & \cdot 3 & \cdot(\underline{x}+j2) &
\end{array}$$

Aus dem Ansatz $(\underline{x}+j2)=0$ ergibt sich der Definitionsbereich:

$$D=\mathbb{C}\setminus\{-j2\}$$

Bestimmen wir nun die Lösungsmenge.

$$\begin{aligned}
\frac{2\underline{x}-j2}{2\underline{x}+j4}-\frac{\underline{x}+1-j}{3\underline{x}+j6} &= \frac{\underline{x}+2-j}{4\underline{x}+j8} \quad |\cdot HN\\
(2\underline{x}-j2)\cdot 6-(\underline{x}+1-j)\cdot 4 &= (\underline{x}+2-j)\cdot 3\\
12\underline{x}-j12-4\underline{x}-4+j4 &= 3\underline{x}+6-j3\\
8\underline{x}-4-j8 &= 3\underline{x}+6-j3 \quad |+4+j8-3\underline{x}\\
5\underline{x} &= 10+j5 \quad |:5\\
\underline{x} &= 2+j\\
L &= \{2+j\}
\end{aligned}$$

6.1.18 Aufgabe 18

$$\frac{2\underline{x}+2+j4}{3\underline{x}-j3+6}-\frac{3\underline{x}-3+j}{4\underline{x}+8-j4}=2-j$$

Gleichungen mit Brüchen bekommt man bekanntlich am besten in den Griff, indem man die Gleichung mit dem Hauptnenner multipliziert. Führen wir also eine Nenneranalyse durch, wie von Reellen Bruchgleichungen gewohnt.

$$\begin{array}{rclllll}
3\underline{x}-j3+6 & = & & 3 & \cdot(\underline{x}+2-j) & & EF=2^2=4\\
4\underline{x}+8-j4 & = & 2^2 & & \cdot(\underline{x}+2-j) & & EF=3\\
\hline
HN & = & 2^2 & \cdot 3 & \cdot(\underline{x}+2-j) & &
\end{array}$$

Aus dem Ansatz $(\underline{x}+2-j)=0$ ergibt sich der Definitionsbereich:

$$D=\mathbb{C}\setminus\{-2+j\}$$

Bestimmen wir nun die Lösungsmenge.

$$\begin{aligned}
\frac{2\underline{x}+2+j4}{3\underline{x}-j3+6}-\frac{3\underline{x}-3+j}{4\underline{x}+8-j4} &= 2-j \quad |\cdot HN\\
(2\underline{x}+2+j4)\cdot 4-(3\underline{x}-3+j)\cdot 3 &= (2-j)\cdot 12(\underline{x}+2-j)\\
8\underline{x}+8+j16-9\underline{x}+9-j3 &= (2-j)\cdot(12\underline{x}+24-j12)\\
-\underline{x}+17+j13 &= 24\underline{x}+48-j24-j12\underline{x}-j24-12\\
-\underline{x}+17+j13 &= 24\underline{x}+36-j48-j12\underline{x} \quad |-17-j13-24\underline{x}+j12\underline{x}\\
-25\underline{x}+j12\underline{x} &= 19-j61\\
(-25+j12)\underline{x} &= 19-j61 \quad |:(-25+j12)\\
\underline{x} &= \frac{19-j61}{-25+j12}\\
\underline{x} &= \frac{(19-j61)(-25-j12)}{(-25+j12)(-25-j12)}\\
\underline{x} &= \frac{-475-j228+j1525-732}{625+144}\\
\underline{x} &= \frac{-1207+j1297}{769}\\
\underline{x} &= -\frac{1207}{769}+j\frac{1297}{769}\\
L &\approx \{-1,5696+j1,6866\}
\end{aligned}$$

6.2 Kompensationsaufgaben:

Hier folgen die Lösungen der Aufgaben mit reellem Term.

Zu allen Aufgaben gibt es zwei grundsätzlich verschiedene Lösungswege.

- Man formt den Term so um, dass er in einen Realteil und in einen Imaginärteil zerlegt werden kann. Dann nimmt man den Imaginärteil und setzt ihn gleich Null.
- Man setzt $\underline{T} = T$, da er ja ohne Imaginärteil als Reelle Zahl aufgefasst werden kann. Dann formt man die Gleichung mit den beiden reellen Größen T und x so um, dass eine Lineare Gleichung entsteht. Diese zerlegt man dann in eine Gleichung mit den Realteilen und eine mit den Imaginärteilen. Dieses Gleichungssystem 2. Ordnung kann dann gelöst werden.

Zu Aufgabe 19 und 20 werden beide Lösungsverfahren vorgestellt, Aufgabe 21 und 22 werden nur mit dem zweiten Verfahren gelöst, weil es effizienter ist.

6.2.1 Aufgabe 19

$$\underline{T} = \frac{15 - j6}{2x + 20 - j4}$$

1. Lösungsverfahren:

$$\begin{aligned}
\underline{T} &= \frac{15 - j6}{2x + 20 - j4} \\
&= \frac{(15 - j6) \cdot (2x + 20 + j4)}{(2x + 20 - j4) \cdot (2x + 20 + j4)} \\
&= \frac{30x + 300 + j60 - j12x - j120 - j^2 24}{(2x + 20)^2 - j^2 4^2} \\
&= \frac{30x + 300 - j60 - j12x + 24}{4x^2 + 80x + 400 + 16} \\
\underline{T} &= \underbrace{\frac{30x + 324}{4x^2 + 80x + 416}}_{Re\underline{T}} + j \underbrace{\frac{-60 - 12x}{4x^2 + 80x + 416}}_{Im\underline{T}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Im\underline{T} &= 0 \\
\frac{-60 - 12x}{4x^2 + 80x + 416} &= 0 \quad | \cdot (4x^2 + 80x + 416) \\
-60 - 12x &= 0 \quad | + 60 \\
-12x &= 60 \quad | : (-12) \\
x &= -5
\end{aligned}$$

$$\underline{T} = Re\underline{T} = \frac{30 \cdot (-5) + 324}{4 \cdot (-5)^2 + 80 \cdot (-5) + 416} = \frac{174}{116} = 1,5$$

$$\boxed{x = -5 \qquad \underline{T} = 1,5}$$

2. Lösungsverfahren:
Da $Im\underline{T} = 0$ ist, ist $\underline{T} = T$.

$$\begin{aligned} \underline{T} &= \frac{15 - j6}{2x + 20 - j4} \\ T &= \frac{15 - j6}{2x + 20 - j4} \quad | \cdot (2x + 20 - j4) \\ 2xT + 20T - j4T &= 15 - j6 \end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung können nun zwei Gleichungen gemacht werden, nämlich eine mit den Realteilen und eine mit den Imaginärteilen.

$$\begin{aligned} \text{Re:} \quad 2xT + 20T &= 15 \\ \text{Im:} \quad -4T &= -6 \end{aligned}$$

Aus der Imaginären Gleichung kann sofort T bestimmt werden.

$$\begin{aligned} -4T &= -6 \quad | : (-4) \\ T &= 1,5 \end{aligned}$$

Das Ergebnis setzen wir in die Reelle Gleichung ein und bestimmen x.

$$\begin{aligned} 2xT + 20T &= 15 \\ 2x \cdot 1,5 + 20 \cdot 1,5 &= 15 \\ 3x + 30 &= 15 \quad | - 30 \\ 3x &= -15 \quad | : 3 \\ x &= -5 \end{aligned}$$

$$\boxed{x = -5 \qquad \underline{T} = 1,5}$$

6.2.2 Aufgabe 20

$$\underline{T} = \frac{5 + j(2x+4)}{3+j6}$$

1. Lösungsverfahren:

$$\begin{aligned}
\underline{T} &= \frac{5 + j(2x+4)}{3+j6} \\
&= \frac{\Big(5 + j(2x+4)\Big) \cdot (3 - j6)}{(3+j6) \cdot (3-j6)} \\
&= \frac{15 - j30 + j3(2x+4) + 6(2x+4)}{9+36} \\
&= \frac{15 - j30 + j6x + j12 + 12x + 24}{45} \\
&= \underbrace{\frac{39+12x}{45}}_{Re\underline{T}} + j \underbrace{\frac{6x-18}{45}}_{Im\underline{T}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Im\underline{T} &= 0 \\
\frac{6x-18}{45} &= 0 \quad | \cdot 45 \\
6x - 18 &= 0 \quad | + 18 \\
6x &= 18 \quad | : 6 \\
x &= 3
\end{aligned}$$

$$\underline{T} = Re\underline{T} = \frac{39+12x}{45} = \frac{39 + 12 \cdot 3}{45} = \frac{5}{3}$$

$$\boxed{x = 3 \qquad \underline{T} = \tfrac{5}{3}}$$

2. Lösungsverfahren:
Da $Im\underline{T} = 0$ ist, ist $\underline{T} = T$.

$$\begin{aligned}
\underline{T} &= \frac{5 + j(2x+4)}{3 + j6} \\
T &= \frac{5 + j(2x+4)}{3 + j6} \qquad | \cdot (3 + j6) \\
3T + j6T &= 5 + j(2x+4) \\
3T + j6T &= 5 + j2x + j4
\end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung können nun zwei Gleichungen gemacht werden, nämlich eine mit den Realteilen und eine mit den Imaginärteilen.

$$\begin{aligned}
\text{Re: } 3T &= 5 \\
\text{Im: } 6T &= 2x + 4
\end{aligned}$$

Aus der Reellen Gleichung kann sofort T bestimmt werden.

$$\begin{aligned}
3T &= 5 \quad | : 5 \\
T &= \frac{5}{3}
\end{aligned}$$

Das Ergebnis setzen wir in die Imaginäre Gleichung ein und bestimmen x.

$$\begin{aligned}
6T &= 2x + 4 \\
6 \cdot \frac{5}{3} &= 2x + 4 \quad | - 4 \\
10 - 4 &= 2x \\
6 &= 2x \quad | : 2 \\
x &= 3
\end{aligned}$$

$$\boxed{x = 3 \qquad \underline{T} = \frac{5}{3}}$$

6.2.3 Aufgabe 21

$$\underline{T} = \frac{\left(\frac{-j8}{4-j2} + x\right) \cdot j8}{\frac{-j8}{4-j2} + x + j8}$$

Da $Im\underline{T} = 0$ ist, ist $\underline{T} = T$.

$$\begin{aligned}
\underline{T} &= \frac{\left(\frac{-j8}{4-j2} + x\right) \cdot j8}{\frac{-j8}{4-j2} + x + j8} \\
T &= \frac{\left(\frac{-j8}{4-j2} + x\right) \cdot j8}{\frac{-j8}{4-j2} + x + j8} \quad \left| \cdot \left(\frac{-j8}{4-j2} + x + j8\right)\right. \\
\frac{-j8T}{4-j2} + xT + j8T &= \left(\frac{-j8}{4-j2} + x\right) \cdot j8 \\
\frac{-j8T}{4-j2} + xT + j8T &= \frac{-j^2 64}{4-j2} + j8x \quad | \cdot (4-j2) \\
-j8T + xT \cdot (4-j2) + j8T \cdot (4-j2) &= 64 + j8x \cdot (4-j2) \\
-j8T + 4xT - j2xT + j32T + 16T &= 64 + j32x + 16x \\
4xT - j2xT + j24T + 16T &= 64 + j32x + 16x
\end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung können nun zwei Gleichungen gemacht werden, nämlich eine mit den Realteilen und eine mit den Imaginärteilen.

$$\begin{aligned}
\text{Re:} \quad 4xT + 16T &= 64 + 16x \\
\text{Im:} \quad -2xT + 24T &= 32x
\end{aligned}$$

Ich löse die Reelle Gleichung nach T auf, um das Ergenbis in die Imaginäre Gleichung einsetzen zu können.

$$\begin{aligned}
4xT + 16T &= 64 + 16x \\
(4x + 16) \cdot T &= 16x + 64 \quad | : (4x + 16)
\end{aligned}$$

Achtung! Wenn ich durch einen Term dividiere, dann muss ich sicher sein, dass der nicht Null werden kann. Für $x = -4$ wäre das aber der Fall. Setze ich diesen Wert in die Gleichung ein, erhalte ich eine wahre Aussage, der Wert $x_1 = -4$ stellt also eine Lösung dar. Der weitere Lösungsweg betrifft also nur noch das Wertepaar x_2/T_2!

$$\begin{aligned}
T_2 &= \frac{16x_2 + 64}{4x_2 + 16} \\
T_2 &= \frac{16 \cdot (x_2 + 4)}{4 \cdot (x_2 + 4)} \quad | \text{ Kürzen mit } (x_2 + 4) \\
T_2 &= \frac{16}{4} \\
T_2 &= 4
\end{aligned}$$

Ich setze den gefundenen Wert in die Imaginäre Gleichung ein, um x_2 zu erhalten.

$$\begin{aligned}
-2x_2T_2 + 24T_2 &= 32x_2 \\
-2x_2 \cdot 4 + 24 \cdot 4 &= 32x_2 \\
-8x_2 + 96 &= 32x_2 \quad | + 8x_2 \\
96 &= 40x_2 \quad | : 40 \\
x_2 &= 2,4
\end{aligned}$$

Die Lösung $x_1 = -4$ setze ich ebenfalls in die Imaginäre Gleichung ein, um das zugehörige T_1 zu bestimmen.

$$\begin{aligned}
-2x_1T_1 + 24T_1 &= 32x_1 \\
-2 \cdot (-4) \cdot T_1 + 24T_1 &= 32 \cdot (-4) \\
8T_1 + 24T_1 &= -128 \\
32T_1 &= -128 \quad | : 32 \\
T_1 &= -4
\end{aligned}$$

$$\boxed{x_1 = -4 \;;\; \underline{\mathrm{T}}_1 = -4} \text{ und } \boxed{x_2 = 2,4 \;;\; \underline{\mathrm{T}}_2 = 4}$$

6.2.4 Aufgabe 22

$$\underline{T} = \frac{-j25x}{x-j25} + j20$$

Da $Im\underline{T} = 0$ ist, ist $\underline{T} = T$.

$$\begin{aligned}
\underline{T} &= \frac{-jx25}{x-j25} + j20 \\
T &= \frac{-j25x}{x-j25} + j20 \quad | \cdot (x-j25) \\
xT - j25T &= -j25x + j20x + 500
\end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung können nun zwei Gleichungen gemacht werden, nämlich eine mit den Realteilen und eine mit den Imaginärteilen.

$$\begin{aligned}
\text{Re:} \quad xT &= 500 \\
\text{Im:} \quad -25T &= -5x
\end{aligned}$$

Ich stelle die Imaginäre Gleichung nach T um, damit das Ergebnis in die Reelle Gleichung eingesetzt werden kann.

$$\begin{aligned}
-25T &= -5x \quad | : (-25) \\
T &= \frac{1}{5}x
\end{aligned}$$

Das Ergebnis setzen wir in die Imaginäre Gleichung ein und bestimmen x.

$$\begin{aligned}
xT &= 500 \\
x \cdot \frac{1}{5}x &= 500 \\
\frac{1}{5}x^2 &= 500 \quad | \cdot 5 \\
x^2 &= 2500 \quad | \sqrt{\ } \\
x &= \pm 50 \\
x_1 = 50 & \qquad x_2 = -50
\end{aligned}$$

Die Ergebnisse für x setzen wir in die umgestellte Reelle Gleichung ein und erhalten die Werte für T.

$$T_1 = \frac{1}{5}x_1 = \frac{1}{5} \cdot 50 = 10$$

$$T_2 = \frac{1}{5}x_2 = \frac{1}{5} \cdot (-50) = -10$$

$$\boxed{x_1 = 50 \ ; \ \underline{T}_1 = 10} \text{ und } \boxed{x_2 = -50 \ ; \ \underline{T}_2 = -10}$$

6.3 Lösungen der Lineargleichungssysteme

Da es bei diesen Aufgaben **keine** Einschränkungen im Definitionsbereich durch Brüche oder ähnliches gibt, ist der Definitionsbereich immer $D = \mathbb{C}^2$ oder $D = \mathbb{C}^3$, je nach Variablenzahl.

6.3.1 Aufgabe 23

$$\begin{aligned} (-5+j3)\underline{x} + (2+j)\underline{y} &= -19 - j12 \\ (2-j)\underline{x} + (2+j4)\underline{y} &= -3 - j \end{aligned}$$

Ein Lineargleichungssystem kann mit verschiedenen Verfahren gelöst werden. Die bekanntesten sind wohl das Einsetzungsverfahren, das Additions-/Subtraktionsverfahren, das Gleichsetzungsverfahren und die Cramersche Regel. Dieses Beispiel möchte ich mit der Cramerschen Regel [7] lösen, weil dieses Verfahren recht zügig zu einer Lösung führt.

Zur Erinnerung: Ein Gleichungssystem in der Form

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

hat die Lösungen:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \qquad \text{und} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

Das gleiche gilt natürlich auch für komplexe Lineargleichungssysteme. Das wenden wir nun auf unser Gleichungssystem an.

[7] Einzelheiten dazu siehe auch hier:
https://dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/cramer.pdf

$$
\begin{aligned}
\underline{x} &= \frac{\begin{vmatrix} (-19-j12) & (2+j) \\ (-3-j) & (2+j4) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (-5+j3) & (2+j) \\ (2-j) & (2+j4) \end{vmatrix}} \\
\underline{x} &= \frac{(-19-j12)\cdot(2+j4)-(-3-j)\cdot(2+j)}{(-5+j3)\cdot(2+j4)-(2-j)\cdot(2+j)} \\
\underline{x} &= \frac{(-38-j76-j24+48)-(-6-j3-j2+1)}{(-10-j20+j6-12)-(4+j2-j2+1)} \\
\underline{x} &= \frac{-38-j76-j24+48+6+j3+j2-1}{-10-j20+j6-12-4-j2+j2-1} \\
\underline{x} &= \frac{15-j95}{-27-j14} \\
\underline{x} &= \frac{(15-j95)\cdot(-27+j14)}{(-27-j14)\cdot(-27+j14)} \\
\underline{x} &= \frac{-405+j210+j2565+1330}{729+196} \\
\underline{x} &= \frac{925+j2775}{925} \\
\underline{x} &= 1+j3
\end{aligned}
$$

Die Variable $\underline{y}$ kann nun entweder durch Einsetzen in eine der beiden Gleichungen oder auch mit Hilfe der Cramerschen Regel bestimmt werden. Ich setze den gefundenen Wert in die erste Gleichung ein.

$$
\begin{aligned}
(-5+j3)\underline{x}+(2+j)\underline{y} &= -19-j12 \\
(-5+j3)(1+j3)+(2+j)\underline{y} &= -19-j12 \\
-5-j15+j3-9+(2+j)\underline{y} &= -19-j12 \\
-14-j12+(2+j)\underline{y} &= -19-j12 \quad |+14+j12 \\
(2+j)\underline{y} &= -5 \quad |:(2+j) \\
\underline{y} &= \frac{-5}{2+j} \\
\underline{y} &= \frac{-5(2-j)}{(2+j)(2-j)} \\
\underline{y} &= \frac{-10+j5}{4+1} \\
\underline{y} &= \frac{-10+j5}{5} \\
\underline{y} &= -2+j
\end{aligned}
$$

Zusammengefasst ergibt sich die Lösungsmenge:

$$\boxed{L=\{(1+j3|-2+j)\}}$$

6.3.2 Aufgabe 24

$$\begin{aligned}(3+j2)\underline{x}-(5+j2)\underline{y} &= -20+j17\\ (2-j3)\underline{x}+(1-j2)\underline{y} &= 2-j3\end{aligned}$$

Auch bei dieser Aufgabe drängt sich einem kein Lösungsverfahren als besonders günstig auf. Um etwas Abwechslung hineinzubringen, lösen wir dieses Gleichungssystem einmal mit dem Additions-/Subtraktionsverfahren. [8] Ich möchte die Variable $\underline{y}$ verschwinden lassen. Daher multiplizieren wir die erste Gleichung mit $(1-j2)$ und die zweite Gleichung mit $(5+j2)$. Die sich ergebenden Gleichungen können dann addiert werden.

$$\begin{array}{rcl}(3+j2)\underline{x}-(5+j2)\underline{y} &=& -20+j17 \quad |\cdot(1-j2)\\ (2-j3)\underline{x}+(1-j2)\underline{y} &=& 2-j3 \quad |\cdot(5+j2)\\ \hline (3+j2)(1-j2)\underline{x}-(5+j2)(1-j2)\underline{y} &=& (-20+j17)(1-j2)\\ (2-j3)(5+j2)\underline{x}+(1-j2)(5+j2)\underline{y} &=& (2-j3)(5+j2)\\ \hline (3-j6+j2+4)\underline{x}-(5-j10+j2+4)\underline{y} &=& -20+j40+j17+34\\ (10+j4-j15+6)\underline{x}+(5+j2-j10+4)\underline{y} &=& 10+j4-j15+6\\ \hline (7-j4)\underline{x}-(9-j8)\underline{y} &=& 14+j57\\ (16-j11)\underline{x}+(9-j8)\underline{y} &=& 16-j11 \quad |+\\ \hline (23-j15)\underline{x} &=& 30+j46\\ \underline{x} &=& \dfrac{30+j46}{23-j15}\\ \underline{x} &=& \dfrac{(30+j46)(23+j15)}{(23-j15)(23+j15)}\\ \underline{x} &=& \dfrac{690+j450+j1058-690}{529+225}\\ \underline{x} &=& \dfrac{j1508}{754}\\ \underline{x} &=& j2\end{array}$$

Die Lösung für $\underline{y}$ bestimmen wir, indem wir den gefundenen Wert $\underline{x}=j2$ in die zweite Ausgangsgleichung einsetzen.

[8]Einzelheiten dazu siehe auch hier:
https://dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/add.pdf

$$
\begin{aligned}
(2-j3)\underline{x} + (1-j2)\underline{y} &= 2-j3 \\
(2-j3)\cdot j2 + (1-j2)\underline{y} &= 2-j3 \\
j4 + 6 + (1-j2)\underline{y} &= 2-j3 \quad | -j4-6 \\
(1-j2)\underline{y} &= -4-j7 \quad | :(1-j2) \\
\underline{y} &= \frac{-4-j7}{1-j2} \\
\underline{y} &= \frac{(-4-j7)(1+j2)}{(1-j2)(1+j2)} \\
\underline{y} &= \frac{-4-j8-j7+14}{1+4} \\
\underline{y} &= \frac{10-j15}{5} \\
\underline{y} &= 2-j3
\end{aligned}
$$

Zusammengefasst ergibt sich die Lösungsmenge:

$$\boxed{L = \{(j2|2-j3)\}}$$

6.3.3 Aufgabe 25

$$\begin{aligned}(3-j5)\underline{x}-(1-j3)\underline{y} &= 0\\(6-j10)\underline{x}+(2+j5)\underline{y} &= 7-j23\end{aligned}$$

Wie bei den anderen Aufgaben zuvor ist auch hier kein Verfahren besonders günstig. Damit alle einmal vorkommen, wähle ich hier das Einsetzungsverfahren. [9] Ich stelle die erste Gleichung nach $\underline{y}$ um und setze den Ergebnisterm in die zweite Gleichung ein.

$$\begin{aligned}(3-j5)\underline{x}-(1-j3)\underline{y} &= 0 \quad |-(3-j5)\underline{x}\\-(1-j3)\underline{y} &= -(3-j5)\underline{x} \quad |\cdot(-1)\\(1-j3)\underline{y} &= (3-j5)\underline{x} \quad |:(1-j3)\\\underline{y} &= \frac{(3-j5)\underline{x}}{1-j3}\end{aligned}$$

Nun kann man entweder versuchen, den Nenner des Bruches $\frac{3-j5}{1-j3}$ durch Konjugiert Komplexes Erweitern reell zu machen und damit aufzulösen, oder den Bruch gleich so, wie er ist, in die andere Gleichung einzusetzen. Sinnvoller ist die zweite Variante, denn es ist nicht gesagt, dass beim Auflösen des Bruches günstige Terme entstehen; die Warscheinlichkeit spricht eher dagegen. Durch Multiplikation mit dem Nenner nach dem Einsetzen bekommt man diesen ja sowieso weg. Deshalb wähle ich hier diese Methode.

$$\begin{aligned}(6-j10)\underline{x}+(2+j5)\underline{y} &= 7-j23\\(6-j10)\underline{x}+(2+j5)\frac{(3-j5)\underline{x}}{1-j3} &= 7-j23 \quad |\cdot(1-j3)\\(6-j10)(1-j3)\underline{x}+(2+j5)(3-j5)\underline{x} &= (7-j23)(1-j3)\\6\underline{x}-j18\underline{x}-j10\underline{x}-30\underline{x}+6\underline{x}-j10\underline{x}+j15\underline{x}+25\underline{x} &= 7-j21-j23-69\\7\underline{x}-j23\underline{x} &= -62-j44\\(7-j23)\underline{x} &= -62-j44 \quad |:(7-j23)\\\underline{x} &= \frac{-62-j44}{7-j23}\\\underline{x} &= \frac{(-62-j44)(7+j23)}{(7-j23)(7+j23)}\\\underline{x} &= \frac{-434-j1426-j308+1012}{49+529}\\\underline{x} &= \frac{578-j1734}{578}\\\underline{x} &= 1-j3\end{aligned}$$

[9] Einzelheiten dazu siehe auch hier:
https://dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/einsetz.pdf

Das Ergebnis können wir nun in die umgestellte erste Gleichung einsetzen.

$$\begin{aligned} \underline{y} &= \frac{(3-j5)\underline{x}}{1-j3} \\ \underline{y} &= \frac{(3-j5)(1-j3)}{1-j3} \quad \mid \text{Kürzen!} \\ \underline{y} &= 3-j5 \end{aligned}$$

Zusammengefasst ergibt sich die Lösungsmenge:

$$\boxed{L = \{(1-j3|3-j5)\}}$$

6.3.4 Aufgabe 26

$$\begin{aligned}(2-j2)\underline{x}+(3-j2)\underline{y} &= -5\\(3-j2)\underline{x}+(2-j3)\underline{y} &= -2+j7\end{aligned}$$

Nehmen wir noch einmal die Cramersche Regel zur Lösung.

$$\begin{aligned}
\underline{x} &= \frac{\begin{vmatrix}(-5) & (3-j2)\\(-2+j7) & (2-j3)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(2-j2) & (3-j2)\\(3-j2) & (2-j3)\end{vmatrix}}\\
\underline{x} &= \frac{(-5)(2-j3)-(-2+j7)(3-j2)}{(2-j2)(2-j3)-(3-j2)(3-j2)}\\
\underline{x} &= \frac{(-10+j15)-(-6+j4+j21+14)}{(4-j6-j4-6)-(9-j6-j6-4)}\\
\underline{x} &= \frac{-10+j15+6-j4-j21-14}{4-j6-j4-6-9+j6+j6+4}\\
\underline{x} &= \frac{-18-j10}{-7+j2}\\
\underline{x} &= \frac{(-18-j10)(-7-j2)}{(-7+j2)(-7-j2)}\\
\underline{x} &= \frac{126+j36+j70-20}{49+4}\\
\underline{x} &= \frac{106+j106}{53}\\
\underline{x} &= 2+j2
\end{aligned}$$

Das Ergebnis setze ich in die erste Gleichung ein.

$$
\begin{aligned}
(2-j2)\underline{x}+(3-j2)\underline{y} &= -5 \\
(2-j2)(2+j2)+(3-j2)\underline{y} &= -5 \\
4+4+(3-j2)\underline{y} &= -5 \quad |-8 \\
(3-j2)\underline{y} &= -13 \quad |:(3-j2) \\
\underline{x} &= \frac{-13}{3-j2} \\
\underline{x} &= \frac{(-13)(3+j2)}{(3-j2)(3+j2)} \\
\underline{x} &= \frac{-39-j26}{9+4} \\
\underline{x} &= \frac{-39-j26}{13} \\
\underline{x} &= -3-j2
\end{aligned}
$$

Zusammengefasst ergibt sich die Lösungsmenge:

$$\boxed{L=\{(2+j2|-3-j2)\}}$$

6.3.5 Aufgabe 27

$$\begin{aligned}
(1+j2)\underline{x}+(2-j2)\underline{y}-(1+j3)\underline{z} &= -10-j11\\
(1-j2)\underline{x}+(3-j3)\underline{y}+(1+j3)\underline{z} &= 9+j2\\
(2+j2)\underline{x}+(1+j2)\underline{y}+(2+j3)\underline{z} &= 11+j22
\end{aligned}$$

Bei einem Lineargleichungssystem 3. Ordnung ist eigentlich immer die Cramersche Regel angesagt, wenn man zügig zum Ziel kommen will. Beim Auflösen der Determinanten benötigt man dann den Satz von Sarrus.[10] Verwenden wir also die Cramersche Regel.

$$\underline{x} = \frac{\begin{vmatrix} (-10-j11) & (2-j2) & (-1-j3)\\ (9+j2) & (3-j3) & (1+j3)\\ (11+j22) & (1+j2) & (2+j3)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1+j2) & (2-j2) & (-1-j3)\\ (1-j2) & (3-j3) & (1+j3)\\ (2+j2) & (1+j2) & (2+j3)\end{vmatrix}}$$

Damit man den Satz von Sarrus besser anwenden kann, schreiben wir die beiden linken Spalten als Denkhilfe noch einmal hinter die jeweilige Determinante.

$$\underline{x} = \frac{\left|\begin{array}{ccc|cc} (-10-j11) & (2-j2) & (-1-j3) & (-10-j11) & (2-j2)\\ (9+j2) & (3-j3) & (1+j3) & (9+j2) & (3-j3)\\ (11+j22) & (1+j2) & (2+j3) & (11+j22) & (1+j2)\end{array}\right.}{\left|\begin{array}{ccc|cc} (1+j2) & (2-j2) & (-1-j3) & (1+j2) & (2-j2)\\ (1-j2) & (3-j3) & (1+j3) & (1-j2) & (3-j3)\\ (2+j2) & (1+j2) & (2+j3) & (2+j2) & (1+j2)\end{array}\right.}$$

$$\underline{x} = \frac{(-10-j11)(3-j3)(2+j3)+(2-j2)(1+j3)(11+j22)}{(1+j2)(3-j3)(2+j3)+(2-j2)(1+j3)(2+j2)}\cdots$$

$$\cdots\frac{+(-1-j3)(9+j2)(1+j2)-(11+j22)(3-j3)(-1-j3)}{+(-1-j3)(1-j2)(1+j2)-(2+j2)(3-j3)(-1-j3)}\cdots$$

$$\cdots\frac{-(1+j2)(1+j3)(-10-j11)-(2+j3)(9+j2)(2-j2)}{-(1+j2)(1+j3)(1+j2)-(2+j3)(1-j2)(2-j2)}$$

$$\underline{x} = \frac{(-30+j30-j33-33)(2+j3)+(2+j6-j2+6)(11+j22)}{(3-j3+j6+6)(2+j3)+(2+j6-j2+6)(2+j2)}\cdots$$

$$\cdots\frac{+(-9-j2-j27+6)(1+j2)-(33-j33+j66+66)(-1-j3)}{+(-1+j2-j3-6)(1+j2)-(6-j6+j6+6)(-1-j3)}\cdots$$

$$\cdots\frac{-(1+j3+j2-6)(-10-j11)-(18+j4+j27-6)(2-j2)}{-(1+j3+j2-6)(1+j2)-(2-j4+j3+6)(2-j2)}$$

[10] Einzelheiten dazu siehe auch hier: https://dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/cramer.pdf

$$\begin{aligned}
\underline{x} &= \frac{(-63-j3)(2+j3)+(8+j4)(11+j22)}{(9+j3)(2+j3)+(8+j4)(2+j2)}\cdots \\
&\cdots\frac{+(-3-j29)(1+j2)-(99+j33)(-1-j3)}{+(-7-j)(1+j2)-12(-1-j3)}\cdots \\
&\cdots\frac{-(-5+j5)(-10-j11)-(12+j31)(2-j2)}{-(-5+j5)(1+j2)-(8-j)(2-j2)} \\
\underline{x} &= \frac{(-126-j189-j6+9)+(88+j176+j44-88)}{(18+j27+j6-9)+(16+j16+j8-8)}\cdots \\
&\cdots\frac{+(-3-j6-j29+58)-(-99-j297-j33+99)}{+(-7-j14-j+2)-(-12-j36)}\cdots \\
&\cdots\frac{-(50+j55-j50+55)-(24-j24+j62+62)}{-(-5-j10+j5-10)-(16-j16-j2-2)} \\
\underline{x} &= \frac{-126-j189-j6+9+88+j176+j44-88}{18+j27+j6-9+16+j16+j8-8}\cdots \\
&\cdots\frac{-3-j6-j29+58+99+j297+j33-99}{-7-j14-j+2+12+j36}\cdots \\
&\cdots\frac{-50-j55+j50-55-24+j24-j62-62}{+5+j10-j5+10-16+j16+j2+2} \\
\underline{x} &= \frac{-253+j277}{25+j101} \\
\underline{x} &= \frac{(-253+j277)(25-j101)}{(25+j101)(25-j101)} \\
\underline{x} &= \frac{-6325+j25553+j6925+27977}{625+10201} \\
\underline{x} &= \frac{21625-j32478}{10826} \\
\underline{x} &= 2+j3
\end{aligned}$$

Auf die gleiche Weise erhalten wir auch die Variable $\underline{y}$.

$$\underline{y} = \frac{\begin{vmatrix} (1+j2) & (-10-j11) & (-1-j3) \\ (1-j2) & (9+j2) & (1+j3) \\ (2+j2) & (11+j22) & (2+j3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1+j2) & (2-j2) & (-1-j3) \\ (1-j2) & (3-j3) & (1+j3) \\ (2+j2) & (1+j2) & (2+j3) \end{vmatrix}}$$

Damit man den Satz von Sarrus besser anwenden kann, schreiben wir die beiden linken Spalten als Denkhilfe noch einmal hinter die jeweilige Determinante.

$$
\begin{aligned}
\underline{y} &= \frac{\left|\begin{array}{ccc|cc} (1+j2) & (-10-j11) & (-1-j3) & (1+j2) & (-10-j11) \\ (1-j2) & (9+j2) & (1+j3) & (1-j2) & (9+j2) \\ (2+j2) & (11+j22) & (2+j3) & (2+j2) & (11+j22) \end{array}\right.}{\left|\begin{array}{ccc|cc} (1+j2) & (2-j2) & (-1-j3) & (1+j2) & (2-j2) \\ (1-j2) & (3-j3) & (1+j3) & (1-j2) & (3-j3) \\ (2+j2) & (1+j2) & (2+j3) & (2+j2) & (1+j2) \end{array}\right.} \\
\underline{x} &= \frac{(1+j2)(9+j2)(2+j3)+(-10-j11)(1+j3)(2+j2)}{(1+j2)(3-j3)(2+j3)+(2-j2)(1+j3)(2+j2)} \cdots \\
&\cdots \frac{+(-1-j3)(1-j2)(11+j22)-(2+j2)(9+j2)(-1-j3)}{+(-1-j3)(1-j2)(1+j2)-(2+j2)(3-j3)(-1-j3)} \cdots \\
&\cdots \frac{-(11+j22)(1+j3)(1+j2)-(2+j3)(1-j2)(-10-j11)}{-(1+j2)(1+j3)(1+j2)-(2+j3)(1-j2)(2-j2)} \\
\underline{x} &= \frac{(9+j2+j18-4)(2+j3)+(-10-j30-j11+33)(2+j2)}{(3-j3+j6+6)(2+j3)+(2+j6-j2+6)(2+j2)} \cdots \\
&\cdots \frac{+(-1+j2-j3-6)(11+j22)-(18+j4+j18-4)(-1-j3)}{+(-1+j2-j3-6)(1+j2)-(6-j6+j6+6)(-1-j3)} \cdots \\
&\cdots \frac{-(11+j33+j22-66)(1+j2)-(2-j4+j3+6)(-10-j11)}{-(1+j3+j2-6)(1+j2)-(2-j4+j3+6)(2-j2)} \\
\underline{x} &= \frac{(5+j20)(2+j3)+(23-j41)(2+j2)}{(9+j3)(2+j3)+(8+j4)(2+j2)} \cdots \\
&\cdots \frac{+(-7-j)(11+j22)-(14+j22)(-1-j3)}{+(-7-j)(1+j2)-12(-1-j3)} \cdots \\
&\cdots \frac{-(-55+j55)(1+j2)-(8-j)(-10-j11)}{-(-5+j5)(1+j2)-(8-j)(2-j2)} \\
\underline{x} &= \frac{(10+j15+j40-60)+(46+j46-j82+82)}{(18+j27+j6-9)+(16+j16+j8-8)} \cdots \\
&\cdots \frac{+(-77-j154-j11+22)-(-14-j42-j22+66)}{+(-7-j14-j+2)-(-12-j36)} \cdots \\
&\cdots \frac{-(-55-j110+j55-110)-(-80-j88+j10-11)}{-(-5-j10+j5-10)-(16-j16-j2-2)} \\
\underline{x} &= \frac{10+j15+j40-60+46+j46-j82+82}{18+j27+j6-9+16+j16+j8-8} \cdots \\
&\cdots \frac{-77-j154-j11+22+14+j42+j22-66}{-7-j14-j+2+12+j36} \cdots \\
&\cdots \frac{+55+j110-j55+110+80+j88-j10+11}{+5+j10-j5+10-16+j16+j2+2} \\
\underline{x} &= \frac{227+j51}{25+j101} \\
\underline{x} &= \frac{(227+j51)(25-j101)}{(25+j101)(25-j101)} \\
\underline{x} &= \frac{5675-j22927+j1275+5151}{625+10201} \\
\underline{x} &= \frac{10826-j21652}{10826} \\
\underline{x} &= 1-j2
\end{aligned}
$$

Um $\underline{z}$ zu bestimmen, setze ich die gefundenen Werte für $\underline{x}$ und $\underline{y}$ in die zweite Ursprungsgleichung ein.

$$\begin{aligned}
(3-j2)\underline{x}+(4+j6)\underline{y}+(1+j2)\underline{z} &= -4+j9 \\
(3-j2)(2+j3)+(4+j6)(1-j2)+(1+j2)\underline{z} &= -4+j9 \\
6+j9-j4+6+4-j8+j6+12+(1+j2)\underline{z} &= -4+j9 \\
28+j3+(1+j2)\underline{z} &= -4+j9 \quad |-28-j3 \\
(1+j2)\underline{z} &= -32+j6 \quad |:(1+j2) \\
\underline{z} &= \frac{-32+j6}{1+j2} \\
\underline{z} &= \frac{(-32+j6)(1-j2)}{(1+j2)(1-j2)} \\
\underline{z} &= \frac{-32+j64+j6+12}{1+4} \\
\underline{z} &= \frac{-20+j70}{5} \\
\underline{z} &= -4+j14
\end{aligned}$$

Zusammengefasst ergibt sich die Lösungsmenge:

$$\boxed{L=\{(2+j3|1-j2|-4+j14)\}}$$

6.3.6 Aufgabe 29

$$\begin{array}{lrcl}
(1) & -3\underline{x} - j2\underline{x} + 4\underline{y} - j2\underline{y} & = & 3 - j37 \\
(2) & \underline{x} + j2\underline{x} + 6\underline{y} - j3\underline{y} & = & -4 - j13 \\
\hline
(1) & (-3 - j2) \cdot \underline{x} + (4 - j2) \cdot \underline{y} & = & 3 - j37 \\
(2) & (1 + j2) \cdot \underline{x} + (6 - j3) \cdot \underline{y} & = & -4 - j13
\end{array}$$

Sieht man sich die Koeffizienten von $\underline{y}$ einmal genau an, so erkennt man, beide enthalten $(2 - j1)$ als Faktor. Durch Multiplikation mit einfachen Reellen Zahlen können sie daher auf den gleichen Wert gebracht werden. Das Additions-/Subtraktionsverfahren bietet sich an.

$$\begin{array}{crlcll}
(1) & (-3 - j2) \cdot \underline{x} & +(4 - j2) \cdot \underline{y} & = & 3 - j37 & | \cdot 3 \\
(2) & (1 + j2) \cdot \underline{x} & +(6 - j3) \cdot \underline{y} & = & -4 - j13 & | \cdot 2 \\
\hline
(1) & (-9 - j6) \cdot \underline{x} & +(12 - j6) \cdot \underline{y} & = & 9 - j111 & |- \\
(2) & (2 + j4) \cdot \underline{x} & +(12 - j6) \cdot \underline{y} & = & -8 - j26 & | \\
\hline
(2) - (1) & (11 + j10) \cdot \underline{x} & & = & -17 + j85 &
\end{array}$$

Jetzt haben wir nur noch eine einzige Komplexe Gleichung, die wir lösen können.

$$\begin{array}{rcll}
(11 + j10) \cdot \underline{x} & = & -17 + j85 & | : (11 + j10) \\
\underline{x} & = & \dfrac{-17 + j85}{11 + j10} & | \text{ konjugiert komplex erweitern} \\
\underline{x} & = & \dfrac{(-17 + j85) \cdot (11 - j10)}{(11 + j10) \cdot (11 - j10)} & \\
\underline{x} & = & \dfrac{-187 + j170 + j935 - j^2 850}{121 + 100} & \\
\underline{x} & = & \dfrac{-187 + j170 + j935 + 850}{221} & \\
\underline{x} & = & \dfrac{663 + j1\,105}{221} & \\
\underline{x} & = & \dfrac{663}{221} + j\dfrac{1\,105}{221} & \\
\underline{x} & = & 3 + j5 &
\end{array}$$

Zur Bestimmung von $\underline{y}$ setze ich diesen Wert in Gleichung (1) ein.

$$\begin{aligned}
(-3-j2)\cdot\underline{x}+(4-j2)\cdot\underline{y} &= 3-j37 & \\
(-3-j2)\cdot(3+j5)+(4-j2)\cdot\underline{y} &= 3-j37 & \\
-9-j15-j6+10+(4-j2)\cdot\underline{y} &= 3-j37 & \\
1-j21+(4-j2)\cdot\underline{y} &= 3-j37 & &|-1+j21 \\
(4-j2)\cdot\underline{y} &= 2-j16 & &|:(4-j2) \\
\underline{y} &= \frac{2-j16}{4-j2} & &|\text{ konjugiert komplex erweitern} \\
\underline{y} &= \frac{(2-j16)\cdot(4+j2)}{(4-j2)\cdot(4+j2)} & \\
\underline{y} &= \frac{8+j4-j64-j^2 32}{16+4} & \\
\underline{y} &= \frac{8+j4-j64+32}{16+4} & \\
\underline{y} &= \frac{40-j60}{20} & \\
\underline{y} &= \frac{40}{20}-j\frac{60}{20} & \\
\underline{y} &= 2-j3 &
\end{aligned}$$

Zusammengefasst ergibt sich die Lösungsmenge:

$$\boxed{L=\{(3+j5|2-j3)\}}$$

6.3.7 Aufgabe 30

$$\boxed{\begin{array}{lrcl} (1) & 3\underline{x} - j2\underline{x} + 2\underline{y} + j5\underline{y} & = & 23 - j3 \\ (2) & 3\underline{x} - j\underline{x} - 2\underline{y} - j\underline{y} & = & -2 - j \end{array}}$$

Die Parameter ähneln sich, sind aber trotzdem verschieden. Daher bietet sich kein Lösungsverfahren besonders an. Aus diesem Grund möchte ich die Lösung nacheinander mit drei Verfahren vorrechnen, und zwar mit:

1. dem **Einsetzungsverfahren**
2. dem **Additions-/Subtraktionsverfahren**
3. der **Cramerschen Regel**

Zunächst bringe ich aber das Gleichungssystem in die Normalform.

$$\boxed{\begin{array}{lrcl} (1) & (3 - j2) \cdot \underline{x} + (2 + j5) \cdot \underline{y} & = & 23 - j3 \\ (2) & (3 - j) \cdot \underline{x} - (2 + j) \cdot \underline{y} & = & -2 - j \end{array}}$$

Lösungsvariante 1: Einsetzungsverfahren Ich löse Gleichung (2) nach $\underline{y}$ auf.

$$\begin{aligned} (3 - j) \cdot \underline{x} - (2 + j) \cdot \underline{y} &= -2 - j & &| - (3 - j) \cdot \underline{x} \\ -(2 + j) \cdot \underline{y} &= -2 - j - (3 - j) \cdot \underline{x} & &| : (-2 - j) \\ \underline{y} &= \frac{-2 - j - (3 - j) \cdot \underline{x}}{-2 - j} \end{aligned}$$

Dieser Term wird für $\underline{y}$ in Gleichung (1) eingesetzt.

$$\begin{aligned} (3 - j2) \cdot \underline{x} + (2 + j5) \cdot \frac{-2 - j - (3 - j) \cdot \underline{x}}{-2 - j} &= 23 - j3 \quad | \cdot (-2 - j) \\ (-2 - j) \cdot (3 - j2) \cdot \underline{x} + (2 + j5) \cdot \Big(-2 - j - (3 - j) \cdot \underline{x}\Big) &= (-2 - j) \cdot (23 - j3) \\ (-6 + j4 - j3 - 2) \cdot \underline{x} + (2 + j5) \cdot (-2 - j) - (2 + j5) \cdot (3 - j) \cdot \underline{x} &= -46 + j6 - j23 - 3 \\ (-8 + j) \cdot \underline{x} + (-4 - j2 - j10 + 5) - (6 - j2 + j15 + 5) \cdot \underline{x} &= -49 - j17 \\ (-8 + j) \cdot \underline{x} + 1 - j12 - (11 + j13) \cdot \underline{x} &= -49 - j17 \quad | - 1 + j12 \\ (-8 + j - 11 - j13) \cdot \underline{x} &= -50 - j5 \\ (-19 - j12) \cdot \underline{x} &= -50 - j5 \quad | : (-19 - j12) \\ \underline{x} &= \frac{-50 - j5}{-19 - j12} \\ \underline{x} &= \frac{(-50 - j5) \cdot (-19 + j12)}{(-19 - j12) \cdot (-19 + j12)} \\ \underline{x} &= \frac{950 - j600 + j95 + 60}{361 + 144} \\ \underline{x} &= \frac{1\,010 - j505}{505} \\ \underline{x} &= 2 - j \end{aligned}$$

Dieser Wert muss nur noch in die umgestellte Gleichung (2) eingesetzt werden, dann haben wir $\underline{y}$.

$$
\begin{aligned}
\underline{y} &= \frac{-2-j-(3-j)\cdot\underline{x}}{-2-j}\\
\underline{y} &= \frac{-2-j-(3-j)\cdot(2-j)}{-2-j}\\
\underline{y} &= \frac{-2-j-(6-j3-j2-1)}{-2-j}\\
\underline{y} &= \frac{-2-j-6+j3+j2+1}{-2-j}\\
\underline{y} &= \frac{-7+j4}{-2-j} && |\text{ konjugiert komplex erweitern}\\
\underline{y} &= \frac{(-7+j4)\cdot(-2+j)}{(-2-j)\cdot(-2+j)}\\
\underline{y} &= \frac{14-j7-j8-4}{4+1}\\
\underline{y} &= \frac{10-j15}{5}\\
\underline{y} &= 2-j3
\end{aligned}
$$

Zusammengefasst ergibt sich die Lösungsmenge:

$$\boxed{L=\{(2-j|2-j3)\}}$$

Lösungsvariante 2: Additions-/Subtraktionsverfahren

$$
\boxed{
\begin{array}{lrcl}
(1) & (3-j2)\cdot\underline{x}+(2+j5)\cdot\underline{y} & = & 23-j3\\
(2) & (3-j)\cdot\underline{x}-(2+j)\cdot\underline{y} & = & -2-j
\end{array}}
$$

Ich möchte die Variable $\underline{y}$ eliminieren. Deshalb multipliziere ich Gleichung (1) mit $(2+j)$ und die Gleichung (2) mit $(2+j5)$. Dann können die Gleichungen addiert werden.

$$
\begin{array}{lrrcll}
(1) & (3-j2)\cdot\underline{x} & +(2+j5)\cdot\underline{y} & = & 23-j3 & |\cdot(2+j)\\
(2) & (3-j)\cdot\underline{x} & -(2+j)\cdot\underline{y} & = & -2-j & |\cdot(2+j5)\\
\hline
(1) & (3-j2)\cdot(2+j)\cdot\underline{x} & +(2+j5)\cdot(2+j)\cdot\underline{y} & = & (23-j3)\cdot(2+j) & \\
(2) & (3-j)\cdot(2+j5)\cdot\underline{x} & -(2+j)\cdot(2+j5)\cdot\underline{y} & = & (-2-j)\cdot(2+j5) & \\
\hline
(1) & (6+j3-j4+2)\cdot\underline{x} & +(4+j2+j10-5)\cdot\underline{y} & = & 46+j23-j6+3 & \\
(2) & (6+j15-j2+5)\cdot\underline{x} & -(4+j10+j2-5)\cdot\underline{y} & = & -4-j10-j2+5 & \\
\hline
(1) & (8-j)\cdot\underline{x} & +(-1+j12)\cdot\underline{y} & = & 49+j17 & |\\
(2) & (11+j13)\cdot\underline{x} & -(-1+j12)\cdot\underline{y} & = & 1-j12 & |+\\
\hline
 & (19+j12)\cdot\underline{x} & & = & 50+j5 &
\end{array}
$$

Jetzt haben wir nur noch eine Lineare Gleichung, die einfach gelöst werden kann.

$$\begin{aligned}
(19+j12)\cdot \underline{x} &= 50+j5 && |:(19+j12)\\
\underline{x} &= \frac{50+j5}{19+j12} && |\text{ konjugiert komplex erweitern}\\
\underline{x} &= \frac{(50+j5)\cdot(19-j12)}{(19+j12)\cdot(19-j12)}\\
\underline{x} &= \frac{950-j600+j95+60}{361+144}\\
\underline{x} &= \frac{1\,010-j505}{505}\\
\underline{x} &= 2-j
\end{aligned}$$

Der Wert für $\underline{y}$ wird analog zur Lösungsvariante 1 bestimmt.

Lösungsvariante 3: Cramersche Regel

$$\boxed{\begin{array}{lrcl}
(1) & (3-j2)\cdot\underline{x}+(2+j5)\cdot\underline{y} & = & 23-j3\\
(2) & (3-j)\cdot\underline{x}-(2+j)\cdot\underline{y} & = & -2-j
\end{array}}$$

Das Gleichungssystem befindet sich in der Normalform, die Cramersche Regel kann also direkt angewendet werden.

$$\begin{aligned}
\underline{x} &= \frac{\begin{vmatrix}(23-j3) & (2+j5)\\ (-2-j) & (-2-j)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(3-j2) & (2+j5)\\ (3-j) & (-2-j)\end{vmatrix}}\\
\underline{x} &= \frac{(23-j3)\cdot(-2-j)-(-2-j)\cdot(2+j5)}{(3-j2)\cdot(-2-j)-(3-j)\cdot(2+j5)}\\
\underline{x} &= \frac{(-46-j23+j6-3)-(-4-j10-j2+5)}{(-6-j3+j4-2)-(6+j15-j2+5)}\\
\underline{x} &= \frac{-46-j23+j6-3+4+j10+j2-5}{-6-j3+j4-2-6-j15+j2-5}\\
\underline{x} &= \frac{-50-j5}{-19-j12} && |\text{ konjugiert komplex erweitern}\\
\underline{x} &= \frac{(-50-j5)\cdot(-19+j12)}{(-19-j12)\cdot(-19+j12)}\\
\underline{x} &= \frac{950-j600+j95+60}{361+144}\\
\underline{x} &= \frac{1\,010-j505}{505}\\
\underline{x} &= 2-j
\end{aligned}$$

Auch hier erfolgt die Bestimmung von $\underline{y}$ entsprechend der ersten Lösungsvariante.

Jeder mag selbst entscheiden, welche Variante die beste ist.